Funció $y = 4x^2 + 5x - 3$

Derivada $y' = \underline{8x + 5}$

Integral $4x^2 + 5x + c$

NOCIONS DE CÀLCUL DIFERENCIAL I INTEGRAL PER A POLPS EN UN DESERT.

Ramon Ferrer i Marí.

VERSIÓ EN VALENCIÀ

TRADUÏT DEL CASTELLÀ AMB L'EINA: HTTPS://WWW.SOFTCATALA.ORG/TRADUCTOR/

ÍNDEX

MATÈRIA	PÁGINES
Per a quí és aquest texte?	2 a 3
Preliminars	4 a 5
Nocions d'Àlgebra	6 a 16
Derivades Simples	17 a 20
Fraccions bàsicas	21 a 25
Derivades amb fraccions	26 a 29
"Hay que ser Torero…"	30 a 35
Derivació per un Número	36 a 37
Regles de derivació	38 a 39
Nocions de derivació amb arrels	40 a 42
Introducció a las Integrals.	43 a 46

Corregit i supervisat per:
Jesús Guanter i Marí. Llicenciat en Ciències Físiques per la Universitat de València.

Profesor de Física en la "Escola La Masía":

Carrer Les Barraques S/N, Tlf: 96 144 12 12.

46136 - Museros València.

Pàgina Web:

https://lamasia.coop/

MATEMÀTIQUES PER A POLPS EN UN DESERT.

Camí: acció de caminar o anar a un lloc o propòsit determinat.
Ruta: camí determinat que va d'un lloc a un altre. Camí o direcció que es pren per a aconseguir un propòsit.

> "Existeix un sol camí, però amb milers de rutes alternatives. Moltes vegades no errem el camí, solament no triem la ruta adequada a les nostres necessitats particulars, d'aquest moment de la nostra vida".
>
> Reflexions d'un Treballador Social.

Per a qui és aquest text?

Aquest modest treball va enfocat a totes aquelles persones que, en una classe de matemàtiques se senten com un polp en un desert, és a dir, completament fora de lloc i amb una horrible sensació d'estar en perill, clar i imminent, de *morir* intel·lectualment parlant.

És una sensació de terrible impotència que el professor/a estiga en la pissarra explicant això:

6.1 Definición. Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Explícitamente, f es derivable en a si hay un número $L \in \mathbb{R}$ verificando que para cada número $\varepsilon > 0$ existe algún número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$ con $x \neq a$ y $|x - a| < \delta$ se tiene que:

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| \leqslant \varepsilon.$$

Dicho número L se llama **derivada de** f **en** a y lo representaremos por $f'(a)$ (notación debida a Lagrange).

I que a tu et sone a això:

Crec que no calen més explicacions.

Però la sensació d'impotència és devastadora, terrible: Aquesta

persona, especialment si parlem de menors d'edat, es pot sentir el ser més ximple del planeta sencer, i més veient com la resta de la classe sembla entendre el que el professor/a està explicant.

Això té un nom i es diu indefensió apresa. Visioneu aquest vídeo. No té desaprofitament: https://youtu.be/OtB6RTJVqPM

En aquests temps és molt senzill posar a parir al docent i tirar-li la culpa de la situació: "*És que no sap expressar-se, és que no se sap explicar…*".

Hem de posar-nos en la pell del docent i entendre que té un temps limitat per a exposar un temari que ha de complir. No es pot parar a fer una explicació a la mesura de les necessitats de cada alumne/a.

Una escola no és una modistería, en la qual s'elaboren vestits a la mesura i gust de cada clienta. Una escola és una *Boutique* on, com a molt, tal com passa a l'escola del meu benvolgut cosí Jesús, es tenen models (assignatures) en format *prêt à porter*. I això en el millor dels casos.

Prêt-à-porter és una expressió francesa que significa textualment Llest per a portar. És a dir, tenim un mateix model de vestit, disponible en diverses talles diferents, amb l'esperança que alguna d'elles li anirà bé a la seua compradora.

En moltes altres escoles, les assignatures es donen com es lliurava la roba en l'exèrcit espanyol als reclutes, quan existia el servei militar obligatori: A cadascun se li donava un lot de roba igual (uniforme) però després, l'aspirant a soldat es trobava que els pantalons podien venir-li estrets, l'abric parka, masa curt, etc. I a l'escola no es té el recurs de canviar-te, amb un company, les peces que no et van.
Repetisc, això no és una crítica brutal i asalvatjada contra els docents. Em consten els esforços i fins als sobreesforços que fan cada dia amb les criatures. I tenen tot el meu afecte i solidaritat.

Però alguna cosa haurem de fer amb els que es queden enrere, amb aquests alumnes que, devastats per la indefensió apresa, se senten com a polps en un desert.

Preliminars.

Internet s'ha convertit en una important eina d'aprenentatge. El que veureu en aquest treball són les anotacions que he pres i adaptat d'un canal de Youtube que es titula “El Profe”. Us deixe l'enllaç als seus vídeos.

https://www.youtube.com/watch?v=ZmbXtZDgr4I&list=PL9ZD--BfNPnYYkgWncCOiPP0ii2chQBvX

No pretenc dir que el seu autor, en Braulio Mendoza, un intel·ligentíssim i prestigiós professional mexicà, siga el millor professor de YouTube que existeix. Hi ha altres professors YouTubers que tenen el seu estil particular i tots són molt dignes.

Però la prova irrefutable, allò que ens demostra que hem trobat el mestre que ens explica les coses de manera comprensible, és precisament això, que aprenguem una matèria, en aquest cas, matemàtiques d'ensenyament secundari, que abans ens resultava àrida i incomprensible.

A mi, en Braulio Mendoza, em serveix. I alguns altres professors com **Matemàtiques Profe Alex**, així com **Ing E Darwin**. De fet, algunes explicacions i desenvolupaments, els he pres d'ells

Si a tu no et serveix, no passa res. Explora la resta de vídeos de matemàtiques de YouTube, fins que trobes aquell professor o professora que et resulte comprensible.

Em vaig acostar a YouTube amb l'esperança que ara, que soc en la meua cinquantena, quan ja tinc la vida professional estabilitzada, pogués llevar-me aquesta ferideta que tinc en el cor. Superar les matemàtiques de 2n curs de BUP, va ser un exercici ardu que em va prendre tres cursos acadèmics. I encara que les vaig superar i vaig poder anar a la Universitat, haig de reconéixer que les exigències professionals d'anys posteriors, m'han portat a oblidar-les.

Per això aprofite aquestes línies per a reivindicar-me, guarir-me aquella ferideta i, si en el procés puc ajudar a algú, millor que millor.

A l’Estat Espanyol, actualment, Derivades i Integrals s'imparteixen en el 2n curs del Batxillerat.

Primer de tot, em donaré el permís de donar una definició personal sobre per a què serveixen les Matemàtiques: Són una Eina, semblant al raig Làser, del qual un científic va dir que era “*una solució a la cerca d'un problema per a resoldre*”.

Les matemàtiques són una ciència que permet descriure la realitat que ens envolta. El que passa és que és una eina molt abstracta i costa veure-li la utilitat, des del pupitre d'un col·legi.

Vegem un exemple:

Sostinc una moneda a la meua mà. Què passarà si la llanço a l'aire? Allò que ens podem imaginar: que la moneda ascendirà fins a un cert punt, es pararà i començarà a caure fins que s'estampe contra el terra.

En termes d'energia, des de la meua mà i durant tot el recorregut, estarà subjecta a dues fórmules diferents:

L'Energia potencial que és l'energia que té un cos situat a una determinada altura sobre el sòl. Tindrà un valor quan es troba a la meua mà i un altre diferent, quan es pare en l'aire, per acció de la força de la gravetat. La fórmula matemàtica és la següent **Ep = m.g.h.** sent **m**, la massa, **g** la força de la gravetat i **h** l'altura de l'objecte.

Una vegada es pare en l'aire, aquí tindrà el seu pic més alt, que anirà decreixent a mesura que caiga a terra, per acció de la gravetat i de l'Energia cinètica. L'energia cinètica és una forma d'energia, coneguda com a energia de moviment. **L'energia cinètica** d'un objecte és aquella que **es produeix a causa dels seus moviments que depén de la massa i velocitat d'aquest**. La seua fórmula matemàtica és

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

m = masa

v = velocidad

En aquestes anotacions em circumscriuré al Càlcul Diferencial, que va ser la bèstia negra a la qual vaig haver de véncer i superar en un ja llunyà, 22 de maig de 1985.

ESCALFANT MOTORS: UNES PETITES NOCIONS D'ÀLGEBRA, PER A SITUAR-NOS

L'àlgebra és una branca de les matemàtiques que utilitza no sols números i signes, sinó també lletres per a resoldre operacions. Es busca trobar el valor numèric de variables denominades incògnites. Aquestes es representen mitjançant lletres de l'alfabet com a x o y. (*)

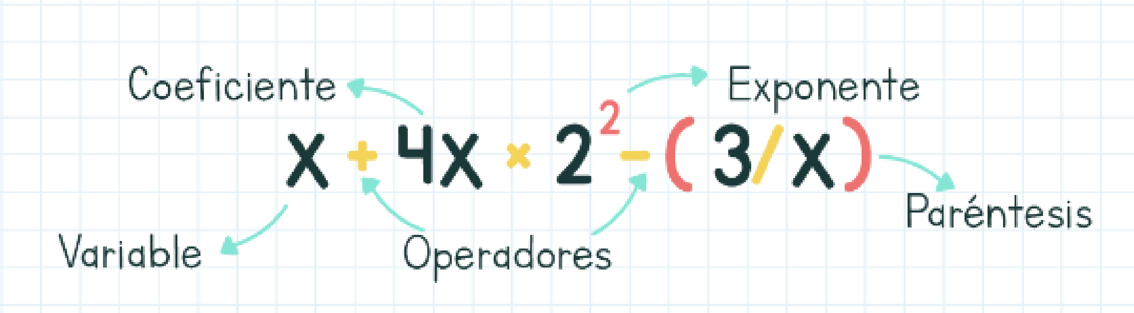
Vídeo font: https://edu.gcfglobal.org/es/algebra/expresiones-algebraicas/1/

Observa aquesta expressió: x+4x*22-(3/x)

Inclou alguns símbols que són comuns en àlgebra, però no en matemàtiques bàsiques. La forma en què s'escriuen aquestes expressions es diu **notació algebraica**.

Aquesta notació inclou cinc components principals:

a) **variables** o **incògnites**,
b) **coeficients**,
c) **operadors**,
d) **exponents** i
e) **parèntesis**.



Vegem què és cada cosa:

Variables o **incògnites**: Una variable o incògnita és una lletra que s'usa per a representar un número. Per exemple, en la següent expressió

$$X+2=5$$

la variable X representa un número desconegut que en sumar-li 2, ens donarà 5.

Expressat com una pregunta seria: a quin número pots agregar-li 2 perquè done 5?

Escrivim X perquè, inicialment, no sabem quin serà aquest número, però el podem esbrinar. Com sabem que 2+3=5, la nostra variable ha de ser 3 o, en altres paraules, X=3. Tècnicament ho resoldríem així:

En X+2=5, passem el 2 a l'altre costat i ens queda X=5-2, amb el que obtenim com a resultat que X=3.

> RECORDA: Cada vegada que desplacem un terme a l'altre costat de l'igual (=), toca canviar l'operador pel seu invers. Dit clar i català: Si estava sumant, ho passarem restant, i si estava multiplicant, ho passarem dividint, o viceversa.

Coeficients: Que són un factor multiplicador, és a dir, el número constant que es troba a l'esquerra d'una variable o incògnita i la multiplica. Per exemple, 3X = X + X + X, on 3 és **coeficient** de la variable X**.**

Operadors: Són els símbols que ens indiquen l'operació que hem de realitzar. En aquestes anotacions, farem servir els següents signes:

- Signe de Sumar +
- Signe de Restar **–**
- Signe de Multiplicació * (No usem el signe x, per a no confondre'ns amb la variable o incògnita, que la representem com a X).
- Signe de Divisió /

Exponents: Que indica quantes vegades hem de multiplicar un número per si mateix. Per exemple 2^3 està compost pel número 2, i l'exponent 3 el que significa que multipliquem 2 per si mateix, tres vegades, és a dir: 2 * 2 * 2 = 8. Si no apareix cap exponent se sobreentén que el seu valor és 1.

Parèntesi: Que s'usen per a agrupar parts d'una expressió algebraica. En un problema has de resoldre primer les expressions que estan dins d'ells i tot seguit la resta. Això significa que hi ha unes regles que has de recordar i respectar escrupolosament. **L'ordre de prioritat en la resolució** és el següent:

1. Parèntesis. (...)
2. Exponents. 3^2
3. Multiplicacions i divisions. * /
4. Sumes i restes. + -

Vegem aquest exemple:

$$50 / 5*2 + (6+3*2) + 64/4^2 – 10$$

1r Parèntesis (6+3*2): Dins del Parèntesi, primer la Multiplicació 3*2 i després la Suma ---> 3*2 = 6 + 6 = 12 i després d'això ens queda:

$$50 / 5*2 + 12 + 64/4^2 – 10$$

2n Exponents 4^2-→ 4 * 4= 16 i ara ens queda:

50 / 5*2 + 12 + 64/16 – 10

3r Multiplicacions i Divisions: 5*2=10, i tenim 50/10 = 5 per un costat, i 64/16=4, per l'altre i obtenim:

50 / 10 + 12 + 4 – 10

5 + 12 + 4 – 10

4t Sumes i Restes:

5 + 12 + 4 – 10 = **11**

Font: Guillermo Westreicher, 28 de noviembre, 2020 *Álgebra*. Economipedia.com (*)

Terme algebraic

El terme algebraic és una expressió simple on es combinen lletres i números, i no se sumen o resten les variables. Per exemple:

$$-5x^3$$

Expressió algebraica

L'expressió algebraica és un conjunt de variables i números que poden combinar-se amb diferents operacions matemàtiques, fins i tot sumes i restes, a diferència dels termes algebraics. Un exemple pot ser el següent:

$$-5x^3+6y$$

Les expressions poden expressar-se en funció al nombre de termes que les contenen com:

- **Monomi:** Un terme només: 15z
- **Binomi:** Posseeix dos termes: $2x^2-7y$
- **Trinomi:** Tres termes: $3x^2+8y+2z$
- **Polinomi:** Si compta amb més de tres termes: $5x^2-3y+6z-9$

Equacions algebraiques

Una equació és l'associació entre dues expressions algebraiques a través del signe d'igualtat. Poden ser principalment de dos tipus:

- **Equació de primer grau**: Quan la variable està elevada màxim a la potència 1. Se la coneix com a equació.

$$5x+5y=9$$

- **Equació de segon grau**: Quan la variable està elevada màxim a la potència 2. També se'l denomina equació quadràtica.

$$5x^2-3y+6z-9=3x$$

OPERACIONS AMB POLINOMIS. LES QUATRE REGLES.

SUMA DE POLINOMIS: 2 passos

Se'ns demana que procedim a sumar: $x^2 + x - 9$ amb $3x^2 - 2x - 6$

Pas 1: Detectar els termes equivalents i anar sumant-los entre ells.

$x^2 + 3x^2 = \mathbf{4x^2}$ X - 2x = **-x** -9 – 6= **-15**

Pas 2: Posar la solució: $\mathbf{4x^2 - x - 15.}$

RESTA DE POLINOMIS: 4 Passos. Farem servir el mateix polinomi d'abans: $x^2 + x - 9$ restar amb $3x^2 - 2x - 6$

Pas 1: Copiar el primer polinomi: $x^2 + x - 9$

Pas 2: Copiar el segon polinomi **I CANVIAR-LI ELS SIGNES**.

$3x^2 - 2x - 6$ ➡ $\mathbf{-3x^2 + 2x + 6}$

Pas 3: Operar amb els termes equivalents $x^2 + x - 9$ $\mathbf{-3x^2 + 2x + 6}$

$x^2 \mathbf{-3x^2} = \underline{\mathbf{-2x^2}}$ $\quad x \mathbf{+ 2x} = \underline{\mathbf{3x}}$ $\quad -9 \mathbf{+6} = \underline{\mathbf{-3}}$

Pas 4: Posar la solució: $\underline{\mathbf{-2x^2 + 3x - 3}}$

Per raons de temps, aquesta part la vaig desenvolupar a mà i en castellà. Aquesta mateixa manca de temps m'obliga a conservar-ho exactament igual com a la versió castellana.

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

La multiplicación de Polinomios se realiza Término a Término, siguiendo el siguiente orden

1º SIGNOS

2º NÚMEROS

3º LETRAS

$$(a-b)\,(x+y-z)$$

MECÁNICA BÁSICA

$$= ax + ay + az - bx - by + bz$$

Trinomio por Trinomio

EJEMPLO 1

$$(3x+2y)\,(5x-4y)$$

$$= 15x^2 - 12xy + 10xy - 8y^2$$

Si hay Términos equivalentes que se pueden reducir, lo hacemos

$$= 15x^2 \quad - 2xy \quad - 8y^2$$

$$= \boxed{15x^2 - 2xy - 8y^2}$$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

EJEMPLO 2 : BINOMIO POR TRINOMIO

$$(-2m^2n + 3m)(-5m + 4m^2n + 6)$$

$$= \underline{10m^3n} - 8m^4n^2 + 12m^2n - 15m^2 + \underline{12m^3n} - 18m$$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Reducir términos equivalentes, que deben ser iguales en todos sus letras —

$$= \boxed{22m^3n - 8m^4n^2 + 12m^2n - 15m^2 - 18m}$$

DIVISIÓN DE POLINÓMIOS : MECÁNICA BÁSICA

Igual que en División aritmética

1º BUSCAR NÚMERO

2º MULTIPLICAR

3º RESTAR

4º BAJAR EL SIGUENTE TÉRMINO

```
 2556 | 12
-24   |-----
 ---    213
 015
 -12
 ---
  036
  -36
  ---
   00
```

"MÉTODO A LO PALETO"

La pregunta: ¿Por qué Expresión se debe multiplicar?

5 PARA QUE DÉ	30	6
3 " " "	3x	x
5x " " "	$10x^3$	$2x^2$
$2x^2y$ " " "	$6x^4 \cdot y^2$	$3xy$

$5x^3 - 3x + x \;|\; x - 5$

$5x^2$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS DE EXPONENTES CONSECUTIVOS

1º ORDENAR DE MAYOR A MENOR

2º BUSCAR LA EXPRESIÓN PARA MULTIPLICAR

3º MULTIPLICAR

4º RESTAR, QUE IMPLICA CAMBIAR DE SIGNO

5º BAJAR EL SIGUIENTE TÉRMINO.

EJEMPLO 1: Sea $2x + 3x^2 - 8 \div x + 2$

1º ORDENAR DE MAYOR A MENOR

$$2x + 3x^2 - 8 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8$$

$$
\begin{array}{llll|l}
 & 3x^2 & +2x & -8 & x+2 \\
\hline
④ & \ominus 3x^2 & \ominus 6x & & 3x-4 \\
\hline
 & / & -4x & -\underline{8} ⑤ & ② \quad ② \\
④ & & \oplus 4x & \oplus 8 & \\
\hline
 & & / & / &
\end{array}
$$

③ $3x(x+2) = 3x^2 + 6x$

③ $-4(x+2) = -4x - 8$

EJEMPLO 2: Sea $6x^2 - 2y^2 - x \cdot y \div y + 2x$

① ORDENAR $6x^2 - xy - 2y^2$

$$
\begin{array}{llll|l}
 & 6x^2 & -xy & -2y^2 & 2x+y \\
\hline
④ & \ominus 6x^2 & \ominus 3xy & & 3x-2y \\
\hline
 & / & -4xy & -2y^2 ⑤ & \\
④ & & \oplus 4xy & \oplus 2y^2 & \\
\hline
 & & / & / &
\end{array}
$$

Primero la x, luego la y, de mayor a menor exponente

$3x(2x+y) = 6x^2 + 3xy$

$2y(2x+y) = 4xy + 2y^2$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS DE EXPONENTES NO CONSECUTIVOS

Un Polinomio puede Tener exponentes no consecutivos. Para dividir, toca dejar espacios en blanco en aquellos exponente que NO aparecen en el polinomio. Lo más sencillo es construir una tabla de exponentes, dejando espacios en blanco, a la vez que ordenamos:

EJEMPLO: Sea $1 - a - a^5 - 3a^2 \div 1 + 2a + a^2$

x^5	x^4	x^3	x^2	x	K

(1) $-a^5 \qquad\qquad\qquad -3x^2 \quad -a \quad +1$ | a^2+2a+1

$\oplus a^5 \quad \oplus 2a^4 \quad \oplus a^3$ | $-a^3+2a^2-3a+1$ (2)

$/ \quad +2a^4 \quad +a^3 \quad -3x^2$ (5)

$\ominus 2a^4 \quad \ominus 4a^3 \quad \ominus 2a^2$

$/ \quad -3a^3 \quad -5a^2 \quad -a$ (5)

$\oplus 3a^3 \quad \oplus 6a^2 \quad \oplus 3a$

$+a^2 \quad +2a +1$ (5)

$\ominus a^2 \quad \ominus 2a \quad \ominus 1$

$/ \quad / \quad /$

$-a^3(a^2+2a+1) = -a^5-2a^4-a^3$

$2a^2(a^2+2a+1) = 2a^4+4a^3+2a^2$

$-3a(a^2+2a+1) = -3a^3-6a^2-3a$

$+1(a^2+2a+1) = a^2+2a+1$

¡OJO! EL RESTO NO SIEMPRE SERÁ = 0

(1). ORDENAR LOS TÉRMINOS DEJANDO LOS ESPACIOS VACÍOS NECESARIOS

(2) BUSCAR LA EXPRESIÓN PARA MULTIPLICAR

(3) MULTIPLICAR

(4) CAMBIAR DE SIGNO Y RESTAR

(5) BAJAR EL SIGUIENTE TÉRMINO

DIVISIÓN DE POLINOMIOS DE TÉRMINOS VARIADOS

1. ORDENAR POR EXPONENTES Y COMBINACIONES DE LETRAS, PARANDO ATENCIÓN A SI SON CONSECUTIVOS, O NO.
2. BUSCAR LA EXPRESIÓN PARA MULTIPLICAR
3. MULTIPLICAR
4. RESTAR = CAMBIAR DE SIGNO
5. BAJAR EL SIGUIENTE TÉRMINO

EJEMPLO 1: Sea $12a^3 + 33ab^2 - 35a^2b - 10b^3 \div 4a - 5b$

Dividendo: $12a^3 - 35a^2b + 33ab^2 - 10b^3$ | Divisor: $4a - 5b$

Cociente: $3a^2 - 5ab + 2b^2$

$-12a^3 + 15a^2b$

$/ \quad -20a^2b + 33ab^2$

$\quad -20a^2b - 25ab^2$

$/ \quad +8ab^2 - 10b^3$

$\quad -8ab^2 + 10b^3$

$/ \quad /$

EJEMPLO 2: Sea $32n^2 - 54m^2 + 12mn \div 8n - 9m$

Dividendo: $-54m^2 + 12mm + 32n^2$ | Divisor: $-9m + 8n$

Cociente: $6m + 4n$

$+54m^2 - 48mn$

$/ \quad -36mn + 32n^2$

$\quad +36mn - 32n^2$

$/ \quad /$

EL CÀLCUL DIFERENCIAL: DERIVADES SIMPLES.

Una derivada és una eina que ens descriu el ritme de canvi de qualsevol funció en un determinat punt o instant. Això serveix a una generalitat d'usos en enginyeria, arquitectura, estadística, economia, electricitat i molts altres.

En una derivada tenim tres parts:

1) La **variable o incògnita**, que és una lletra que serveix per a representar un número.
2) L'**exponent,** que indica quantes vegades hem de multiplicar un número per si mateix i
3) El **coeficient**, que és un factor multiplicador, és a dir, el número constant que es troba a l'esquerra d'una variable o incògnita i la multiplica. Per exemple, 3X = X + X + X, on 3 és **coeficient** de la variable X.

En una derivada la idea és fer més petita una funció en grau. Però no ho podem fer per les braves, cal seguir unes regles per a aconseguir-ho. Comencem:

Primer Cas: La funció més bàsica de totes.

Siga X^3 que està composta per la variable o incògnita X, i l'exponent 3 el que significa que multipliquem X per si mateixa, tres vegades, és a dir: X * X * X.

Per a baixar-li el grau, toca fer dos passos:

Pas 1: Cal passar l'exponent a la posició avançada de la X i deixar-lo multiplicant a aquesta, és a dir, que hem de passar de X^3 a **3X**.

Pas 2: El grau només pot reduir-se en una unitat, per tant, hem de respectar el grau anterior, reduït l'exponent en una unitat, és a dir, passar de X^3 a X^2.

I finalment ens queda $3x^2$.

Més exemples:

$X^8 \rightarrow 8X^7$ $X^5 \rightarrow 5X^4$ $X^3 \rightarrow 3X^2$

$X^9 \rightarrow 9X^8$ $X^6 \rightarrow 6X^5$ $X^4 \rightarrow 4X^3$

Segon cas: La funció ve acompanyada d'un número.

En aquest segon cas ens trobem que la funció ve acompanyada d'un número. Ho farem gairebé igual, en 3 passos:

Siga $6X^5$

Pas 1: Respectant aquest número, baixarem l'exponent davant de la X

$(5) * 6X^5$

Pas 2: El multiplicarem pel número. (5)*6= 30X

Pas 3: Tot seguit, reduirem el grau: $30X^4$

$6X^5 \rightarrow 30X^4$

Altres exemples:

$3X^4 \rightarrow (4) *3X^4 \rightarrow 12X^3$

$5X^7 \rightarrow (7) *5X^7 \rightarrow 35X^6$

Tercer cas: Quan tenim només la X, per la primera llei d'exponents, la derivada de X és igual a 1.

Comencem donant un llistat amb les vuit lleis d'exponents i els seus exemples.

De totes les taules que circulen per Internet, aquesta em sembla la millor: La columna de l'esquerra té la fórmula genèrica, mentre que a la dreta es dona un exemple pràctic de la seua aplicació.

1 $a^0 = 1 \qquad a \neq 0$	$3^0 = 1$
2 $a^m \, x \, a^n = a^{m+n}$	$2^3 x 2^2 = 2^{3+2}$
3 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
4 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3}$
5 $(a^m)^n = a^{m.n}$	$(3^2)^3 = 3^{2.3}$
6 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$
7 $(a \, . \, b)^n = a^n \, . \, b^n$	$(2 \, x \, 3)^2 = 2^2 \, x \, 3^2$
8 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2}$

Font: El Blog del profesor Alex. https://profe-alexz.blogspot.com/2012/10/teoria-de-exponentes-ejercicios.html

X → $1 * x^0$ → 1*1 = 1   8X → $8 * x^0$ → 8*1 = 8

Quart cas: La derivada d'un número sempre és igual a 0. No importa si aquest número és 5 o 5.000.000.000.000 (5 Bilions). Se'n diu "CONSTANT", perquè mai canvia: Un 5 sempre és un 5, un 29 sempre és un 29. Se'l representa com una "c" o una "k", com ja veurem en la introducció a les Integrals.

$$y = 5X^3 + 2X^2 - 5X + 10$$

$$\frac{dy}{dx} = 15X^2 + 4X - 5 + 0$$

Resoldrem una derivada de manera lenta, que es vegen tots els passos que toca fer per a resoldre-la:

$$y = 12X^5 - 3X^4 + 8X^3 - 2X^2 + 5X - 10$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 * 12X^4 - 4 * 3X^3 + 3 * 8X^2 - 2 * 2X^1 + 5 * 1\ (X^0) - 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4 + 5 - 0$$

I encara que amb aquest aspecte està correcta, per costum, quan tenim una constant (10, en aquest cas) la derivada del qual és 0, aquest 0 no es posa, amb el que el resultat final de la derivada, així en pla bonic, i amb la roba dels diumenges, seria:

$$\frac{dy}{dx} = 60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4 + 5$$

REFRESCANT LES OPERACIONS AMB FRACCIONS.

Com vam fer anteriorment amb les nocions d'àlgebra, cal recordar una miqueta les regles d'operació de les fraccions, abans de ficar-nos a derivar amb fraccions. Toca aclarir que la part de dalt el diu numerador I la part de baix es diu denominador.

$$\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$$ Per exemple: $$\frac{5}{2}$$

- Suma de fraccions amb diferent denominador:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(a*d)+(b*c)}{(b*d)}$$

- Suma/Resta de fraccions amb igual denominador: Es conserva el denominador i se sumen o es resten els numeradors directament.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

- Resta de fraccions amb diferent denominador: Es multipliquen, en creu, cada numerador amb el seu denominador oposat, i es resten entre ells. El que surta s'ha de dividir pel producte de tots dos denominadors.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{(a*d)-(b*c)}{(b*d)}$$

- Multiplicació de fraccions: Es multipliquen entre si, els numeradors i els denominadors, cadascun pel seu costat.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{(a*c)}{(b*d)}$$

- Divisió de fraccions: Es multipliquen en creu i després es divideixen entre si.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{(a*d)}{(b*c)}$$

Eines útils en l'aritmètica de fraccions amb derivades.

Per allò de "*fer cultureta*" que diem a Catalunya, és a dir, ampliar els coneixements, he explicat a dalt les operacions principals i més bàsiques que es fan amb fraccions.

De totes maneres, aclarir que les operacions que usarem principalment, en les derivades amb fraccions, són la suma i resta de fraccions d'igual denominador i les multiplicacions, per això van destacades en aquest groc tan cridaner.

Però hi ha altres eines bàsiques que hem de conéixer o recordar.

Una fracció en la qual les xifres del numerador i denominador coincideixen, és sempre igual a 1. Es diuen "fraccions iguals a la unitat".

$$\frac{a}{a}=1 \qquad \frac{4}{4}=1 \qquad \frac{36}{36}=1$$

ALERTA ESPÒILER: Si us plau, queda't amb aquesta "*història*" perquè ens vindrà de perles, quan ens fiquem amb el tema de les Derivades amb fraccions.

Et faig cinc cèntims: Com que com la segona cosa que ens demanen és reduir l'exponent en un grau, és a dir, en un 1, aquest 1 sempre el podem expressar com una fracció igual a la unitat, amb el que el pas de reduir l'exponent en un grau, el convertim en una simple resta de fraccions d'igual denominador, per la qual cosa conservarem a baix el denominador (2), mentre que a dalt, simplement, restarem el numerador (5) menys el denominador (2).

$$\frac{a}{b} \quad \frac{a-b}{b} \quad \Rightarrow \quad x^{5/2} \qquad \frac{5}{2} \quad \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$$

Una solució més simple que l'electrònica d'un càntir.

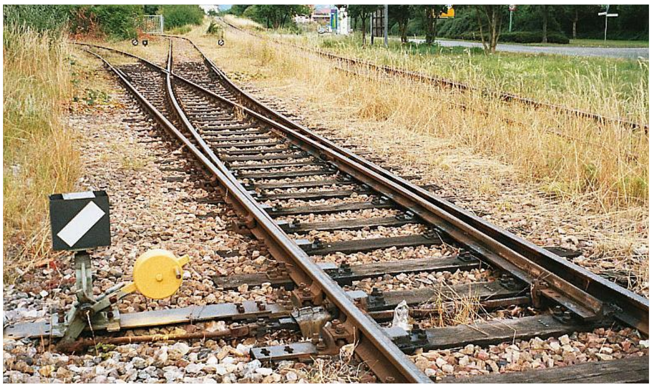
https://www.65ymas.com/consejos/porque/por-que-el-botijo-es-un-sistema-perfecto-de-refrigeracion-y-esta-casi-en-desuso_5543_102.html

Multiplicació d'un número per una fracció.

Estigueu molt atents/as perquè aquesta eina té dues variants i totes són útils i importants. Primer comencem pel bàsic.
Tenim un número multiplicant una fracció, per exemple:

$$a * \frac{b}{c} \qquad 3 * \frac{2}{3}$$

Per a resoldre'l se'ns obren dues vies: una lenta i una altra ràpida.



No et preocupes, que t'explicaré ambdues.
Aconselle que comences per la lenta i, quan agafes pràctica, ja prendràs la via ràpida quan calgui.

VIA LENTA: El que fem és col·locar un 1 sota el número, i procedim a multiplicar, com si tal cosa

$$\frac{a}{1} * \frac{b}{c} = \frac{a*b}{1*c} \quad \text{o sigui} \quad \frac{3}{1} * \frac{2}{5} = \frac{3*2}{1*5} = \frac{6}{5}$$

Sempre que la fracció ho permeta, hem de recórrer a la màxima simplificació i per a això tenim dues maneres de fer-ho:

Forma 1: Dividir el numerador entre el denominador. Així doncs, si dividim 6 entre 3, ens dona 2.

$$\frac{6}{3} = 2$$

Forma 2: Podem trobar-nos que, si dividim el numerador entre el denominador, no ens done un nombre enter. Però com hem de buscar el número més petit de la fracció, hem de mirar a veure si podem dividir el numerador i el denominador entre un mateix número. A aquesta acció se'n diu simplificació.

Per exemple:

Si tenim $\frac{45}{35}$ podem dividir numerador i denominador entre 5 i ens queda $\frac{9}{7}$ i ho deixem així, perquè no podem continuar simplificant-ho.

VIA RÀPIDA: Aquesta via és una autèntica "ganga", per allò que és molt ràpida i senzilla que és, però té una limitació: Solament podem usar-la <u>si el número i el denominador de la fracció COINCIDEIXEN</u>.

Així doncs, el que fem és que realitzem una simplificació al bèstia, sense anestèsia ni res, perquè en coincidir el número i el denominador, entre ells "*s'anul·len*".

Tornant a l'exemple que hem fet servir en la Forma 1:

$3 * \frac{2}{3}$ el número i el denominador, entre ells "*s'anul·len*" i ens queda $\cancel{3} * \frac{2}{\cancel{3}}$ amb el que el resultat final és 2.

DERIVADES AMB FRACCIONS.

Les derivades poden incorporar fraccions. Per això he invertit les cinc pàgines anteriors a explicar com s'usen.

Comencem per una Derivada amb una fracció en l'exponent:

Siga $x^{3/4}$

- Primer, hem de passar l'exponent al coeficient.

$$\frac{3}{4} \text{ X}$$

- Segon, cal baixar en 1 grau l'exponent:

$$\frac{3}{4} - 1$$

Però aquest 1 el podem expressar com $\frac{4}{4}$ pel que si fem la resta de fraccions d'igual denominador, tenim que:

$\frac{3}{4} - \frac{4}{4} = \frac{3-4}{4} = \frac{-1}{4}$ o cosa que és el mateix $-\frac{1}{4}$

Pel que finalment obtenim:

$$x^{3/4} \rightarrow \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$$

Més del mateix (pas a pas, com en l'exemple anterior)

$$x^{5/2} \rightarrow \frac{5}{2} - \frac{2}{2} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}$$

La Forma àgil és una drecera mental: No oblidem que estem fent una resta de fraccions d'igual denominador, per la qual cosa conservarem a baix el denominador (2), mentre que a dalt restarem el numerador (5) menys el denominador (2).

$$\frac{a}{b} \quad \frac{a-b}{b} \Rightarrow x^{5/2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$$

Un altre exemple (ja l'hem vist en la pàgina 16 i aquí l'aplicarem al coeficient).

Siga $3\,x^{2/3}$

Primer pas: traslladem l'exponent original al coeficient i el multipliquem pel número que hi ha, que és un 3.

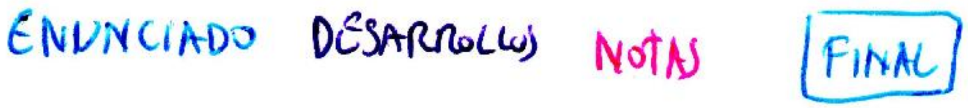
$$3 * \frac{2}{3} x^{?} \Rightarrow \cancel{3} * \frac{2}{\cancel{3}} x^{?} \Rightarrow 2\,x^{?}$$

Segon pas: reduïm l'exponent, que és $2\ /\ 3$ respectant el denominador i $\frac{2-3}{3} = -\ \frac{1}{3}$ i l'incorporem a la derivada en l'exponent.

El resultat final ens quedarà així.

$$2\ x^{-1/3}$$

A continuació, el Profe Don Braulio Mendoza, proposa tres exercicis amb derivades. Per una raó pràctica els he resolt a mà i he escanejat tant els desenvolupaments com el seu resultat. Per a això he usat un codi de colors amb tres bolígrafs diferents:



Us deixe l'enunciat del primer exercici perquè mireu de resoldre'ls per vosaltres/as mateixos/as. Una vegada ho tingueu acabat, podeu contrastar-ho amb la pàgina següent, o veure com ho resol D. Braulio Mendoza en el vídeo.

Animeu-vos a resoldre-ho que com en el famós acudit del candidat a una ocupació al qual li pregunten:

“*Domina vosté l'anglés?”* al que respon: “*Si és baixet i es deixa…*” perquè aquesta derivada *es deixa*, així que per ella

$$y = 2x^{1/3} - 5x^{4/5} + 3x^{1/2}$$

EJERCICIOS ENUNCIADO DESARROLLOS NOTAS FINAL

- $y = 2x^{1/3} - 5x^{4/5} + 3x^{1/2}$

$$\frac{dy}{dx} \quad 2 \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3} - \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{5} x^{-1/5} + \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{2}{3} x^{-2/3} - 4x^{-1/5} + \frac{3}{2} x^{-1/2}}$$

- $y = \frac{3}{2} x^{1/3} + \frac{5}{2} x^{2/3}$ RAPIDO

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{1}{2} x^{-2/3} + \frac{5}{3} x^{-1/3}}$$

- $y = \frac{2}{5} x^{1/3} + \frac{3}{4} x^{2/5}$ RÀPIDO

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{2}{15} x^{-2/3} + \frac{3}{10} x^{-3/5}}$$

Tornem a les lleis d'exponents. Recorda que les igualtats van en els dos sentits, és a dir, podem aplicar-les d'esquerra a dreta, com de dreta a esquerra:

1	$a^0 = 1 \qquad a \neq 0$	$3^0 = 1$
2	$a^m \, x \, a^n = a^{m+n}$	$2^3 x 2^2 = 2^{3+2}$
3	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
4	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3}$
5	$(a^m)^n = a^{m.n}$	$(3^2)^3 = 3^{2.3}$
6	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$
7	$(a\,.\,b)^n = a^n\,.\,b^n$	$(2 \, x \, 3)^2 = 2^2 \, x \, 3^2$
8	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2}$

Font: El Blog del profesor Alex. https://profe-alexz.blogspot.com/2012/10/teoria-de-exponentes-ejercicios.html

Treballarem amb les següents:

2	$a^m \, x \, a^n = a^{m+n}$	$2^3 x 2^2 = 2^{3+2}$
3	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
4	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3}$
6	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$

Si t'estàs preguntant el perquè d'aquest incís, és molt senzill: No sempre et trobaràs la derivada, neta de pols i

palla, preparadeta perquè la pugues derivar, com un senyor/a. Moltes vegades et trobaràs amb un autèntic *"brau" (=Toro de lídia, de gran grandària, i amb unes banyes enormes) matemàtic* d'aquest calibre:

$$\text{Siga} \quad y = x\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + 5$$

I a veure com ho "*toreges*"…

Que no córrega el pànic. El secret consisteix en el fet que, abans de començar a derivar, hem de sotmetre'l a una sèrie d'"arranjaments previs", com quan una dona es compra un vestit bonic, però el porta a la modista perquè li ho arregle, d'aquí i d'allà, perquè vol que li ajuste com un guant i siga la més maca de la festa.

Tornant al *brau matemàtic*, el *torejarem*:

Font: Diari ABC. El torero José Tomás brindant el toro al respectable, en la Feria de Jerez.

$$y = x\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + 5$$

Com ja he dit abans, el primer és "*arreglar*" la funció per a poder derivar-la i per a això ens recolzarem en les lleis d'exponents:

Pas 1: Arreglem $x\sqrt{x}$ usant

6 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$

i ens queda:

y= x $(x^{1/2})$

Pas 2: Arreglem - $\frac{2}{x^2}$ usant

3 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

però al revés (de dreta a esquerra) i ens queda:

- $2x^{-2}$

Nota important: Encara que la formula, en genèric, parla de $\frac{1}{a^n}$ aquest 1 no és inamovible i, de fet, toca canviar-ho per la xifra que aparegua en el numerador, tal com hem fet ja.

El + 5 no cal arreglar-lo, així que no el toquem i ens queda:

y= $x^1(x^{1/2})$ - $2x^{-2}$ +5

$$1 + 1/2 = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

y= $x^{3/2}$ - $2x^{-2}$ +5 Això ja es pot derivar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2} + 4x^{-3} + 0 \qquad 4x^{-3} \quad -2*-2=4 \quad -2x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2} + 4x^{-3}$$ i ja ho tenim.

Anem ara amb el "*segundo de la tarde*", que es veu d'aquesta manera:

Siga $y = \frac{\sqrt{x^3}}{2x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + 2x\sqrt[3]{x}$

Com podeu veure, aquesta funció necessita més arranjaments que el vestit de comunió de Tarzán, així que anem a resoldre l'embolic:

Pas 1: Arreglem $\frac{\sqrt{x^3}}{2x}$ usant

6 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$

i ens queda:

$y = \frac{x^{3/2}}{2x}$

Pas 2: Arreglem $\frac{5}{\sqrt{x}}$ usant

6 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$

i ens queda:

$\frac{5}{x^{1/2}}$

Pas 3: Arreglem $2x\sqrt[3]{x}$ usant

6 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$

i ens queda:

$2x(x^{1/3})$

$y = \frac{x^{3/2}}{2x} + \frac{5}{x^{1/2}} + 2x(x^{1/3})$ però això encara s'ha d'arreglar una mica més,

Pas 4: Arreglem $\frac{x^{3/2}}{2x}$ usant

4 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3}$

i ens queda en aquesta forma: $\frac{1}{2}x^{1/2}$ perquè $\frac{3}{2}$ – 1 és el mateix que $\frac{3}{2}$ - $\frac{2}{2}$ $= \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

Pas 5: Arreglem $\frac{5}{x^{1/2}}$ usant

3 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

i ens quedarà com $5x^{-1/2}$

Pas 6: Finalment arreglarem la tercera part que és 2x($x^{1/3}$), per a això li aplicarem

2 $a^m \, x \, a^n = a^{m+n}$	$2^3 x 2^2 = 2^{3+2}$

amb el que

$$1 + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

i ens queda $2x^{4/3}$ i ja està, ja només ens queda la rematada final, perquè ara ja es pot derivar, així que anem "*entrar a matar al toro*"

y= $\frac{1}{4}x^{1/2}$+ $5x^{-1/2}$+$2x^{4/3}$

$\frac{dy}{dx}$= $\frac{1}{4}x^{-1/2}$- $\frac{5}{2}x^{-3/2}$+$\frac{8}{3}x^{1/3}$ FINAL

DERIVACIÓ D'UNA FUNCIÓ SIMPLE QUE ESTÀ DIVIDIDA PER UN NÚMERO.

En aquest cas, tenim dues vies diferents:

a) DERIVAR DIRECTAMENT TOTA LA FUNCIÓ SIMPLE (NUMERADOR) RESPECTANT EL NÚMERO DEL DENOMINADOR: EL QUE SURTI, ES DEIXA COM ESTÀ.
b) INDIVIDUALITZAR CADA TERME DE LA FUNCIÓ SIMPLE COM UNA FRACCIÓ I ANAR-LO DERIVANT: AI QUE SURTI, SE LI APLICA LA NORMA DE REDUIR LA FRACCIÓ A LA SEUA MENOR EXPRESSIÓ.

Veiem un exemple

$$f(x)= \frac{9x^4-3x^3+7x^2-2x+6}{3}$$

a) DERIVAR DIRECTAMENT TOTA LA FUNCIÓ SIMPLE (NUMERADOR) RESPECTANT EL NÚMERO DEL DENOMINADOR: EL QUE SURTI, ES DEIXA COM ESTÀ.

$$f(x)= \frac{9x^4-3x^3+7x^2-2x+6}{3}$$

$$f'(x)= \frac{36x^3-9x^2+14x-2}{3} \quad \text{FINAL}$$

a) INDIVIDUALITZAR CADA TERME DE LA FUNCIÓ SIMPLE COM UNA FRACCIÓ I ANAR-LO DERIVANT: AI QUE SURTI, SE LI APLICA LA NORMA DE REDUIR LA FRACCIÓ A LA SEUA MENOR EXPRESSIÓ.

$$f(x)= \frac{9x^4-3x^3+7x^2-2x+6}{3}$$

f’(x)= $\frac{36x^3}{3}$ - $\frac{9x^2}{3}$ + $\frac{14x}{3}$ - $\frac{2}{3}$ i els que es puga, els reduirem a la seua menor expressió:

f’(x)= $12x^3$- $3x^2$+ $\frac{14x}{3}$ - $\frac{2}{3}$ FINAL

DERIVACIÓ D’UNA FUNCIÓ COMPOSTA QUE ESTÀ DIVIDIDA PER UN NÚMERO.

Aquí la cosa ja es complica, ja que passem d’una funció simple, per exemple

$$\frac{3x+1}{2}$$

A una funció composta com

$$\frac{(4x+1)^2}{3}$$

I aquí la cosa canvia com de la nit al dia. Ja no podem operar directament, sinó que necessitem usar una fórmula específica per a això. Aquesta fórmula és: $du^n = n*u^{n-1} * du$

A aquesta fórmula se li diu “Regla de la Cadena” i és una de les 4 regles de derivació que veurem ara.

Fuente: https://www.youtube.com/watch?v=aVNa-J8iB5I Ing E Darwin

REGLAS DE DERIVACIÓN: POTENCIA, CADENA, PRODUCTO Y COCIENTE O DIVISIÓN.

POTENCIA $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Sea $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$

$f'(x) = 4x^{3-1} - 2x^{1-1} + 1$

$f'(x) = 3 \cdot 4x^2 - 2x^{1-1=0} + 1 \to 0$

$a^0 = 1$

$f'(x) = 12x^2 - 2$

CADENA: $dv^n = n \cdot v^{n-1} \cdot dv$

- Es una regla muy importante. La regla de la cadena casi siempre funciona cuando tenemos un paréntesis con una operación por fuera (Exponente, seno, logaritmo ...). Dicho fácil es multiplicar la derivada de lo de AFUERA, por la derivada de lo de adentro. $(2x-8)$ $(2x-8)^4$

- dv es la derivada de la variable sin el exponente.
- Los constante se multiplican entre sí, siempre que tengan IGUAL EXPONENTE -

Sea $f(x) = (2x-8)^4$

$n \cdot v^{n-1} = 4(2x-8)^3$

$dv = (2x^{1-1} - 8 \to 0) = 2 \cdot 1 = (2)$

$a^0 = 1$

$f'(x) = 4^1 (2x-8)^3 \cdot (2)^1$

$= 8(2x-8)^3$

Para el PRODUCTO y el COCIENTE o DIVISIÓN, usaremos la misma función, como ejemplo, que es:

$$f(x) = \underbrace{(2x^3 + 5x)}_{u} \underbrace{(-x^5 + 3x^2)}_{v}$$

PRODUCTO $d\,u \cdot v = u \cdot dv + v \cdot du$

① Hacer las derivadas

$du = (6x^2 + 5)$ $\quad 2 \cdot 3x^2 + 5x^{1-1}$

$6x^2 + 5x^{1-1=0}$

$a^0 = 1$

$6x^2 + 5 \cdot 1$

$dv = (-5x^4 + 6x)$ $\quad -5x^4 + 2 \cdot 3x$

② Aplicar la fórmula

$$f'(x) = (2x^3 + 5x) \cdot (-5x^4 + 6x) + (-x^5 \cdot 3x^2)\,(6x^2 + 5)$$

COCIENTE o DIVISIÓN: $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(-x^5 + 3x^2)\,(6x^2 + 5) - (2x^3 + 5x)\,(-5x^4 + 6x)}{(-x^5 + 3x^2)^2}$$

DERIVACIÓ D'UNA FUNCIÓ AMB ARRELS.

No us espanteu, semblen més difícils del que en realitat són. Primer recordem una mica la mecànica bàsica de l'operació amb arrels:

6 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$

3 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

Siga y= $\sqrt{2x}+1$ podríem usar la Regla de la Cadena, aplicant les fórmules d'exponents que tenim i ens sortiria :

$$Y' = (2x+1)^{1/2}$$

$$Y' = \frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2} * (2)$$

$$Y' = \frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2} * (2)$$

$$Y' = (2x+1)^{-1/2} \Rightarrow \frac{1}{(2x+1)^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x}+1}$$ FINAL

A veure, la qual cosa hem fet està intrínsecament bé, el que passa és algun matemàtic intel·ligent, li va donar al cervell sense estar-se de res i va trobar una drecera, la mar d'arregladeta, en forma de fórmula, tal que així:

$$d\sqrt{v} = \frac{dv}{2\sqrt{v}}$$

Així que tornem a l'arrel de l'exemple anterior, que era

$$Y=\sqrt{2x} + 1$$

I aplicant la nova fórmula tenim que

$$\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{2}{2\sqrt{2x}+1} \Rightarrow \frac{2}{2\sqrt{2x}+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x}+1} \quad \text{FINAL}$$

Com podem veure és la meitat de passos més curta i directe. Vegem un altre exemple Siga y= $\sqrt{7x^2}$+2x-3

$$\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{14x + 2}{2\sqrt{7x^2 + 2x} - 3}$$

Podem simplificar, dividint entre 2 i ens queda:

$$\frac{7x+1}{\sqrt{7x^2+2x}-3} \quad \text{Final}$$

Un altre exemple més Siga y= $\sqrt{9x^2+10x-2}$

$$\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{18x+10}{2\sqrt{9x^2+10x-2}}$$

Podem simplificar, dividint entre 2 i ens queda:

$$\frac{9x+5}{\sqrt{9x^2+10x-2}} \quad \text{Final}$$

DERIVADES DE FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES I LOGARÍTMIQUES.

Aquestes derivades excedeixen amb molt la meua intenció en aquestes senzilles anotacions.
Qui vulga aprendre a operar amb elles, li remet als vídeos corresponents en Youtube, tant en el canal de **El Profe**, Don Braulio Mendoza,

https://www.youtube.com/c/ElProfe1977

com en el Canal **Matemáticas Profe Alex.**

https://www.youtube.com/playlist?list=PLeySRPnY35dG2UQ35tPsaVMYkQhc8Vp

INTRODUCCIÓ A LES INTEGRALS

Dita senzillament, Les integrals són la inversa de les derivades, alguna cosa així com la seua imatge reflectida en un mirall. La seua mecànica va al revés del que hem fet per a derivar. Posem una taula i expliquem:

Funció El exponent és **n** x^n	x^2	x^4	x^9	$3x^4$	$8x^3$	$3x^8$
Derivada: El exponent és **n-1**	2x	$4x^3$	$9x^8$	$12x^3$	$24x^2$	$24x^7$
Integral: El exponent és **n+1**	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^{10}}{10}$	$\frac{3x^5}{5}$	$\frac{8x^4}{4}$	$\frac{3x^9}{9}$
¿La Integral es pot simplificar?	NO	NO	NO	NO	SI $2x^4$	SI $\frac{x^9}{3}$

Font: Elaboració pròpia, sobre dades extretes del Canal "**El Profe**", *Introducción a las Derivadas.*

Així doncs, mentre que en la derivada baixàvem l'exponent en un 1, en la integral, l'exponent el pugem en un 1 i a

més, ho dividim tot per aquest exponent: $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ Veiem un exemple tret de la taula anterior;

$$x^2 \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} \rightarrow \frac{x^3}{3}$$

En cas que la funció tinga un número davant, el deixem tal com està, i integrem. A tall d'exemple:

$3x^4$ amb el que la seua integral serà $\frac{3x^5}{5}$

I ara, sense anestèsia ni res, amb un parell de cxllxns, ens tirem a la piscina:

$$\int (x^3 + 5x^2 + 3x + 2)\, dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C \quad \text{Final.}$$

Com ho hem fet?:

1. Els tres primers termes de la integral $(x^3 + 5x^2 + 3x)$ no tenen cap secret. Simplement, hem aplicat $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ i ens quedem tan contents.

2. A la integral de qualsevol número només, se li agrega una x, per això en integrar, el 2 l'hem convertit en 2x. (Recorda que quan derivàvem, la derivada de 2x era igual a 2).

3. Una integral no definida com aquesta, sempre s'acaba afegint una C o una K al final, que simbolitzen una CONSTANT.
    - ✓ Recorda que, cuando derivàvem, la derivada d'un número en solitari era igual a 0.
    - ✓ Posem la C o la K, perquè a l'ésser una integral no definida, no tenim cap forma de determinar (=saber) quin era aquest número.

Farem una comparativa, com en les revistes de cotxes. A partir d'una funció, primer la derivarem i després, agafem la derivada i li farem la seva integral:

Siga la funció y= $4x^2$+5x-3

Al derivar-la ens queda: 2*4x +5 ➡ y'= 8x +5

I ara anem a fer la seua Integral:

$$\int (8x + 5)\, dx$$

$$Y' = \frac{8x^2}{2} + 5x + c \Rightarrow 4x^2 + 5x + c$$

Encara que no hauria de ser un problema, a hores d'ara, posarem una fracció pel mig i vegem què passa:

$$\int (2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1)\, dx$$

$$= \frac{2x^4}{4} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + c$$

$$= \frac{1}{2}\, x^4 + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}\, x^2 - x + c \qquad \text{Final}$$

I deixe els apunts aquí. Qui vulga saber més sobre Integrals, que acudisca als vídeos ja assenyalats.